Sobre a classificação de germes de aplicações

Orientador: Carlos Humberto Soares Júnior

Orientando: André Viana Rodrigues Chaves Bezerra

1. Introdução.

O objetivo principal do presente trabalho consta em aprofundar o estudo de função que são continuas mais nunca deriváveis, como por exemplo a função de Weierstrass:

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x), \tag{1}$$

que foi estudada e demonstrada.

O próprio Weierstrass mencionou que Riemann aparentemente teria feito uma construção similar à sua em torno de 1861. Entretanto, nem Weierstrass e nem Riemann fizeram a primeira contribuição. O exemplo mais antigo conhecido hoje é o do Matemático Tcheco Bernard Bolzano que, em torno do ano de 1830, exibiu uma função sempre contínua e nunca diferenciável.

Infelizmente este exemplo ficou perdido até o ano de 1922 quando foi publicado postumamente. Em torno de 1860, o matemático Suíço Charles Cellérier também descobriu um exemplo o qual só foi publicado em 1890. Após a publicação da função de Weierstrass, muitos outros matemáticos deram sua própria contribuição.

Todas as técnicas envolvidas na pesquisa em Teoria de Singularidades, desde o estudo dos germes finitamente determinados, das classificações através da ação dos grupos de Mather R, L, C, K e A via campos controlados e o estudo de invariantes, passam de um jeito ou de outro pelo estudo da categoria diferenciável dos germes envolvidos.

2. Metodologia.

No decorrer de vigência da bolsa foram realizados estudos dos livros mencionados na referencia bibliográfica, com o objetivo de provar que existe função continua e que não possui nenhuma derivada. No decorrer dos meses estudamos diversos assuntos. De primeiro momento foram realizados estudos sobre os assuntos abordados no livro de Lima (1997, 2011), em que, no decorrer dos meses estudamos os seguintes assuntos: conjuntos finitos e infinitos, números reais, sequências de números reais, series numéricas, topologias na reta, limites de funções, dentre outros. Ademais, podemos citar os principais: Funções Continuas, Derivadas, Sequência e Séries de função e a demonstração da função de McCarthy (1953). Com o objetivo de fazer um estudo pormenorizado sobre os exemplos históricos de funções sempre contínuas e nunca diferenciáveis, em que o projeto teve como base a demonstração da função de McCarthy (1953).

3. Ressultados e Discussões

No presente projeto estudamos diversos assuntos com o enfoque em Funções Contínuas, Derivadas e Sequências e Séries de Funções. Com isso o projeto foi desenvolvido com base na demonstração da função de McCarthy, que consiste em:

dado $\mathcal{M}$ é definid como a série infinita

$$\mathcal{M}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{2k}x), \tag{2}$$

onde

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, x \in [-2, 0], \\ 1 - x, x \in [0, 2]. \end{cases}$$

e $g(x+4) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Agora enunciaremos um teorema importante e a definição de derivada usados na demonstração da função de McCarthy:

Teorema 0.0.1 *Se uma sequências de funções* $f_n : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *converge uniformemente para* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e cada* f_n *é contínua no ponto* $a \in \mathcal{X}$ *então* f *é contínua no ponto* a.

Definição 0.0.2 *Sejam* $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathcal{X} \bigcap \mathcal{X}'$. *A derivada da função* f *no ponto* a *é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \tag{3}$$

onde o limite pode existir ou não. Se existir, diz-se que f *é derivado no ponto* a.

4. Conclusão.

Percebeu-se que através de todos os estudos realizados se torna possível encontrar funções continuas e nunca deriváveis, como foi explanado no presente resumo. Concluímos todo o projeto ate o final do prazo estabelecido.

Apoio: O trabalho foi financiado pelo PIBIC - UFPI.

Palavras Chaves: Funções Contínuas, funções deriváveis

5. Referência Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages. Análise Real, vol 1: Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro. SBM, 1997. 200 p.

[2] Lima, Elon Lages. Curso de Análise, vol 1: Projeto Euclides. Rio de Janeiro. SBM.

[3] Thim, Johan, Continuous Nowhere Differentiable Functions, Master of Science Programme, Luleá University of Tecnology, 2003